



**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.9

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

**Динамика дискретной системы с оператором  
эволюции, задаваемым неявной функцией:  
от отображения Мандельброта  
к унитарному отображению**

**О. Б. Исаева, М. А. Обычев, Д. В. Савин**

Предложена к рассмотрению абстрактная динамическая система с дискретным временем, задаваемая неявной зависимостью значений переменной в следующие друг за другом моменты времени; таким образом, динамика этой системы неоднозначно определена как в обратном, так и в прямом времени. Один пример системы подобного рода описан в работах Буллета, Осбалдестина и Персивалья [Physica D, 1986, vol. 19, pp. 290–300; Nonlinearity, 1988, vol. 1, pp. 27–50] и демонстрировал некоторые особенности поведения консервативных систем. Исследуемое в настоящей работе отображение позволяет осуществлять переход от однозначно определенного в прямом времени случая к неявному и, далее, к своего рода «консервативному» пределу, отвечающему выполнению условия унитарности для оператора эволюции. Записанное на базе комплексного отображения Мандельброта, оно демонстрирует трансформацию феноменов комплексной аналитической динамики в «консервативные» феномены и позволяет выявить взаимосвязь между ними.

Ключевые слова: множество Мандельброта, множество Жюлиа, консервативная и квазиконсервативная динамика, мультистабильность, неявное отображение

---

Получено 24 мая 2017 года

После доработки 14 августа 2017 года

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-12-01008).

---

Исаева Ольга Борисовна

[isaevao@rambler.ru](mailto:isaevao@rambler.ru)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Обычев Максим Андреевич

[obycheff.maxim@yandex.ru](mailto:obycheff.maxim@yandex.ru)

Савин Дмитрий Владимирович

[savin.dmitry.v@gmail.com](mailto:savin.dmitry.v@gmail.com)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

## Введение

В нелинейной науке принят подход, заключающийся в классификации наблюдаемых феноменов в соответствии с особенностями отвечающей им динамики и конструировании соответствующих модельных систем. Таких специальных феноменов и классов систем описан целый ряд: гамильтонова и консервативная динамика [1], обратимые и необратимые системы [2], комплексная аналитическая динамика [3, 4], квазипериодическая динамика [5], феномен странного нехаотического аттрактора [6], различные типы хаотических аттракторов [7] (например, гиперболические [8]) и т. д. С другой стороны, в нелинейной теории весьма актуальными являются исследования, касающиеся поиска взаимосвязей между этими особыми и, тем самым, обособленными классами явлений. К результатам поисков подобного рода можно отнести открытие всевозможных бифуркаций и сценариев, например, перехода к хаосу (фейгенбаумовский сценарий [9], переход через разрушение квазипериодических движений [10, 11], перемежаемость [12] и др.). Также это исследования возможности «выживания», «гибели» или трансформации особых феноменов при переходе системы из одного класса симметрии в другой: например, от диссипативных к консервативным [13, 14], от удовлетворяющих условиям комплексной аналитичности к комплексно неаналитическим [15, 16], от необратимых систем к обратимым [17].

В контексте теории динамических систем понятие необратимости во времени в основном применимо к дискретным моделям — отображениям — и, по сути, является абстракцией. В отличие от обратимого отображения, когда у любой точки  $x_{n+1}$  в фазовом пространстве есть лишь один прообраз  $x_n$  (рис. 1а), у необратимого отображения таких прообразов может быть несколько (рис. 1б), а значит, динамика в обратном времени не однозначна.<sup>1</sup>

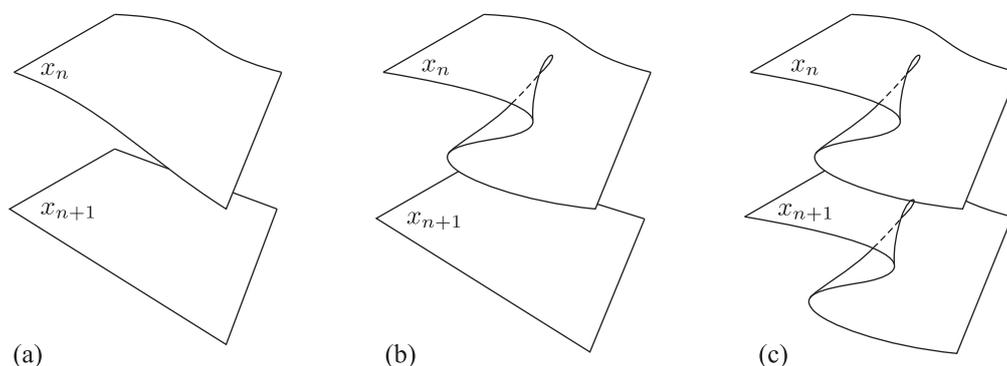


Рис. 1. Примеры отображений: (а) взаимно однозначное, (б) необратимое, (с) неоднозначное как в прямом, так и в обратном времени.

Можно пойти дальше и представить такую дискретную динамическую систему, в которой неоднозначность решения существует и в обратном времени, и в прямом (рис. 1с). Задаваться такое отображение может, например, оператором эволюции в виде неявной функции значений переменной в следующие друг за другом моменты времени:

$$g(x_{n+1}, x_n) = 0. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Известны также модели с неоднозначной динамикой в прямом времени, задаваемые системой аффинных или дробно-линейных преобразований — системы итерируемых функций, клейновы и фуксовы группы [11, 18].

Такое представление, исходя из теоремы о неявной функции, при определенных условиях (в частности, если  $g(x_{n+1}, x_n)$  непрерывна и дифференцируема) обеспечит существование непрерывных и дифференцируемых преобразований  $x_{n+1} = f(x_n)$ , действующих локально для окрестности любой точки  $(x_n, x_{n+1})$ .

Кроме того, представление в виде неявной функции дает определенную симметрию, способную отражать некий физический смысл. К примеру, консервативность системы часто определяют через унитарность оператора ее эволюции  $\mathbf{U}$ . Условие унитарности выглядит как  $\mathbf{U}\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{E}$  (здесь  $\mathbf{U}^+$  — эрмитово сопряжение,  $\mathbf{E}$  — единичный оператор) и эквивалентно выражению  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+$ . Это условие, применяемое обычно для линейных операторов и матриц, может быть некоторым образом обобщено на нелинейный случай — для дискретной системы, заданной неявно.

В работах [19–21] предложен пример полиномиального отображения вида (1) с комплексной переменной  $z$ , которое удовлетворяет условию

$$g(z_{n+1}, z_n) = -g^*(z_n, z_{n+1}) = 0, \quad (2)$$

где «\*» — комплексное сопряжение, а

$$g^*(z_n, z_{n+1}) = (g(z_n^*, z_{n+1}^*))^*. \quad (3)$$

Для такой неявной функции локальные преобразования  $z_{n+1} = f(z_n)$  являются унитарными в некоем расширенном смысле, а именно: исходя из (2) и (3), можно записать  $z_n^* = f(z_{n+1}^*)$ , а произведя далее обратное преобразование для  $z_n$  и комплексное сопряжение, имеем  $f^{-1}(z_{n+1}) = f^*(z_{n+1})$ . Последнее выражение эквивалентно сходному по форме записи определению унитарности условию:

$$f^*(f(z)) = f(f^*(z)) = z. \quad (4)$$

Будем называть такую ситуацию обобщенной унитарностью. В отличие от линейного случая, при котором последняя запись однозначно выражала бы консервативность, для нелинейной функции  $f$  сохранение фазового объема в общем случае для произвольной  $f$  не очевидно.

Для рассматриваемой авторами [19] модели в виде квадратичной формы в фазовом пространстве обнаружены характерные для консервативной динамики структуры: множество особым образом отобранных траекторий образует островки устойчивости вокруг неподвижных точек эллиптического типа.

В настоящей работе нами также будет предложена и исследована модель в виде неявного отображения, но мы не ограничимся рассмотрением лишь случая с отвечающим обобщенной унитарности типом симметрии. Будем рассматривать эту модель не как математический казус, а как представительницу нового класса динамических систем, и попытаемся применить к ее изучению арсенал известных в теории динамических систем методов.

Предлагаемая модель будет позволять изменением управляющего параметра осуществлять гладкий переход от комплексного квадратичного отображения с однозначно определенной в прямом времени динамикой к неоднозначному случаю и, далее, к обобщенно унитарному пределу. Это позволит нам проследить за трансформацией известных феноменов комплексной аналитической динамики при выходе из класса традиционных отображений и, возможно, обнаружить новые явления. Кроме того, предлагаемый переход «однозначное отображение — неявное отображение — обобщенно унитарное отображение» по сути является переходом между диссипативной и консервативной динамикой, что само по себе представляет интерес.

## 1. Модельная система

Комплексные аналитические отображения — класс систем, особо богатых на различные критические явления и уникальные сценарии перехода к хаосу [22, 23]. Вместе с тем, системы из этого класса интересны не только с математической точки зрения. Они оказываются физически реализуемыми [24–27] и применимыми в весьма разнообразных отраслях: в теории фазовых переходов [28, 29], в теории перколяции [30], в теории квантового туннелирования [31], в КАМ-теории [32], в вакуумной микроэлектронике [33] и для описания ограниченной диффузией агрегации [34]. Канонической моделью для комплексной динамики является отображение Мандельброта — комплексифицированное логистическое отображение [3, 4, 35]. Рассмотрим одну из классических форм его записи:

$$z_{n+1} = f(z_n) = \rho z_n + z_n^2, \quad z, \rho \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

У этой системы всегда имеется неподвижная точка при  $z = 0$ , мультипликатор которой  $\mu = f'(0)$  совпадает с параметром  $\rho$ . Управляя параметром  $\rho$ , удобно наблюдать различные бифуркации неподвижной точки в начале координат. У одномерного комплексного аналитического отображения среди таких бифуркаций помимо удвоения периода (характерного для отображения с вещественными переменными и параметром) встречаются и другие типы усложнения периода: например, утроения, учетверения и т. д. [16, 22]. На базе этих бифуркаций организуются бесконечные каскады со своими специфическими скейлинговыми характеристиками [15, 22, 25, 33].

На рисунке 2 представлена карта динамических режимов отображения (5) на плоскости ( $\varphi = \text{Arg } \rho, r = |\rho|$ ). Структура на рисунке представляет собой развертку множества Мандельброта. Область  $|\rho| < 1$  отвечает устойчивости точки  $z = 0$ . Вдоль границы к ней прикреплены «лепестки» усложненного периода. Точки прикрепления соответствуют рациональным значениям числа вращения  $\text{Arg } \mu / 2\pi$  единичного по абсолютной величине мультипликатора, то есть расположены при  $\rho = \exp(2\pi i m/n)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , где  $n$  определяет период рождающегося цикла.

При фиксированном значении параметра в системе (5) может реализовываться не более одного аттрактора. Границей бассейна притяжения этого аттрактора является хаотический

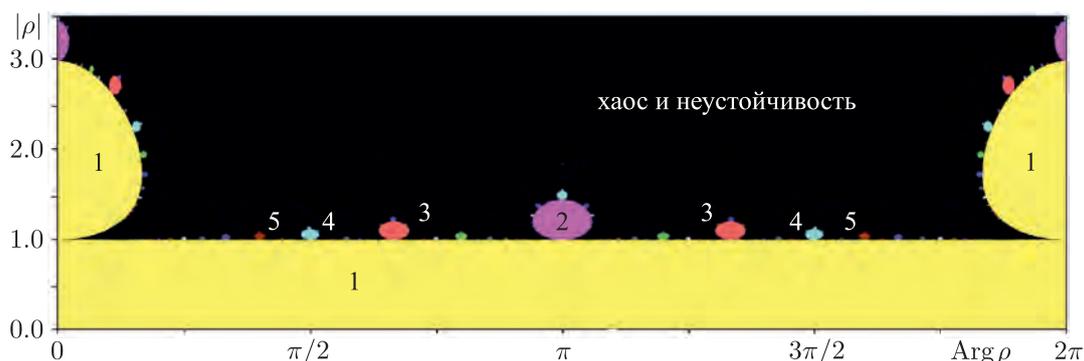


Рис. 2. Развертка множества Мандельброта для отображения (5) на плоскости ( $\varphi = \text{Arg } \rho, r = |\rho|$ ), изображенная в виде карты динамических режимов. Различными цветами обозначены области, отвечающие существованию циклов относительно низких периодов (указаны цифрами). Черным цветом обозначена область неустойчивости по Лагранжу, а также мелкие области сложного поведения: высокочастотного и хаотического.

репеллер — множество Жюлиа. Известно, что этот репеллер может приобретать различную фрактальную форму при вариации параметра. Он может быть связным множеством, заполненным бассейном притяжения (для значений параметра из множества Мандельброта). Продолжает он существовать и в отсутствие аттрактора. Тогда множество Жюлиа — несвязное, или обобщенное канторово, множество (в области неустойчивости). Также оно может быть дендритоподобным (на границе множества Мандельброта).

Сформулируем на базе модели (5) новую систему — неявную:

$$\varepsilon z_{n+1}^2 + z_{n+1} = \rho z_n + z_n^2. \quad (6)$$

Ее можно переписать в виде

$$g(z_{n+1}, z_n) = \varepsilon z_{n+1}^2 + z_{n+1} - \rho z_n - z_n^2 = 0. \quad (7)$$

При нулевом значении параметра  $\varepsilon$  модель сводится к классической, однозначно определенной в прямом времени системе (5). В то же время для (7) может выполняться условие обобщенной на нелинейный случай унитарности, которое мы запишем в более общем, чем в (2), виде:

$$g(z_{n+1}, z_n) = E g^*(z_n, z_{n+1}) = 0, \quad (8)$$

где  $E = \exp(i\phi)$  — некое значение на комплексной единичной окружности. Выполнение условия (8) происходит при наложении на параметры следующих условий:

$$|\varepsilon| = |\rho| = 1, \quad (9)$$

$$\text{Arg } \varepsilon = \text{Arg } \rho = \phi + \pi. \quad (10)$$

Таким образом, управляя параметром  $\varepsilon$ , можно переводить систему от классической динамики к неоднозначной неявной, а затем плавно осуществлять переход к «консервативному», отвечающему обобщенной унитарности, пределу в ней (второй параметр в этом случае также должен быть подстроен в соответствии с (9)–(10)). Попытаемся пронаблюдать за трансформацией множеств Жюлиа и Мандельброта и других сложных феноменов на фазовой плоскости и в пространстве параметров при таком переходе.

Прежде чем приступить к изучению (6), полезно еще обсудить имеющий важное значение для понимания динамики одномерных отображений (как вещественных, так и комплексных аналитических) вопрос о его экстремумах. Пусть  $C$  — это критическая точка, то есть точка, в которой равна нулю производная определяющей эволюцию однозначного отображения функции. Экстремумом функции (точкой  $E$ ) будем называть точку, у которой сливаются прообразы. В случае неявного отображения точки  $E$  и  $C$  могут быть определены из соотношения

$$-\frac{g'_{z_n}(E, C)}{g'_{z_{n+1}}(E, C)} = 0 \quad \text{при} \quad g(E, C) = 0. \quad (11)$$

В случае (6) критическая точка определяется как

$$C = -\rho/2 \quad (12)$$

и не зависит от  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon \neq 0$  у этой точки обнаруживается два образа — экстремумы:  $E = E_{1,2}$ . Пара прообразов каждого из них сливается в  $C$ . Наличие нескольких экстремумов у отображения (это известно для однозначной бимодальной и др. динамики [36]) может приводить к сложным явлениям — как минимум, к мультистабильно сосуществующим

режимам на базе разных экстремумов, а также на базе их обоих. Интересно, что такая бимодальность становится возможной у неявного отображения уже при квадратичном его порядке.

Неявность оператора эволюции приводит также к наличию полюсов  $P = P_{1,2}$ , определяющихся как

$$-\frac{g'_{z_n}(S, P)}{g'_{z_{n+1}}(S, P)} = \infty \quad \text{при} \quad g(S, P) = 0. \quad (13)$$

Их образы сливаются в одной точке сингулярности

$$S = -1/2\varepsilon. \quad (14)$$

Наличие в нашей модели сингулярностей, обычно свойственное для представленных рациональными функциями традиционных моделей, наряду с наличием у нее нескольких экстремумов также является привлекающей внимание задачей, особенно в комплексной аналитической динамике [35, 37].<sup>2</sup>

## 2. Динамика в прямом времени. Диск Зигеля

Найдем решения модельной системы (6) относительно значения переменной в  $(n+1)$ -ый момент времени:

$$z_{n+1} = f_{(1,2)}(z_n) = -\frac{1}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} + (\rho z_n + z_n^2)/\varepsilon}. \quad (15)$$

Чтобы избежать при численном моделировании деления на нуль в пределе перехода к явному случаю, решение можно искать в эквивалентной форме:

$$z_{n+1} = \frac{\rho z_n + z_n^2}{1/2 \pm \sqrt{1/4 + \varepsilon(\rho z_n + z_n^2)}}. \quad (16)$$

Главная специфическая особенность неявного отображения — неоднозначность поведения в прямом времени — определяется наличием знака « $\pm$ » в решении. Чтобы этого избежать, можно считать оператором эволюции решение (15) (или (16)) в совокупности с неким правилом выбора знака «+» или «-» на очередном шаге итерирования. Например, можно всегда выбирать верхний знак «+». В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  именно это решение отвечает квадратичному отображению Мандельброта (см. числитель в (16); знаменатель вырождается в единицу), в то время как решение со знаком «-» находится на бесконечности.

При отличных от нуля  $\varepsilon$  можно ассоциировать «+»-решение с продолжением по этому параметру классической комплексной динамики. При достаточно малых  $\varepsilon$  естественно предположить, что свойственный отображению Мандельброта режим поведения сохранится, во всяком случае до тех пор, пока сингулярность  $S$  не приблизится к бассейну его притяжения.

Другое решение, соответствующее выбору знака «-», теоретически может дать свои возможности динамики, в том числе дополнительные устойчивые траектории: аттракторы

<sup>2</sup>К примеру, в фазовом пространстве комплексных аналитических рациональных отображений со степенью  $m \geq 3$  может реализовываться особое явление — кольцо Арнольда–Эрмана — заполненная нейтральными квазипериодическими траекториями область в виде кольца с фрактальными границами [35].

могут реализовываться на базе второго экстремума, возникающего при введении неясности и приходящего с увеличением  $\varepsilon$  из бесконечности.

Разделение на два типа траекторий весьма условно и имеет какой-либо смысл при относительно малых  $\varepsilon$ . Во-первых, при сближении экстремумов могут возникать устойчивые орбиты, отвечающие последовательному применению различной очередности обоих решений (16). Во-вторых, даже устойчивая орбита, присущая однозначно определенному отображению, может частично или полностью в результате продолжения по параметру  $\varepsilon$  перейти через сингулярность (складку) в «область ответственности» второго решения.

Симметричные относительно сингулярности (14) решения (15) позволяют ввести удобное для классификации траекторий разбиение фазового пространства. Для вещественного случая неявного отображения оно выглядит наиболее наглядным: область определения переменной разделяется точкой  $S$  на две части, которым можно сопоставить символы «+» и «-». В соответствии с посещением этих областей траектории можно присвоить символический код. В комплексном отображении для решений в прямом времени имеет место симметрия поворота на  $180^\circ$  относительно  $S$ , и разбиение можно делать произвольной проходящей через эту точку прямой. Будем в качестве символа кода рассматривать знаки «+» и «-» в (16) с учетом, что квадратный корень из комплексного числа определяется как

$$\sqrt{w} = \sqrt{\frac{|w| + \operatorname{Re} w}{2}} + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} w) \sqrt{\frac{|w| - \operatorname{Re} w}{2}}.$$

Ограничимся в этом разделе изучением траекторий с символическим кодом, состоящим только из знаков «+»: тем самым мы продемонстрируем «продолжение» одного варианта фазового портрета отображения Мандельброта по параметру  $\varepsilon$ . При этом будем осуществлять однопараметрический переход к унитарному пределу. Для этого зафиксируем  $|\rho| = 1$ , а модуль управляющего параметра  $\varepsilon$  будем менять от нуля до единицы. Аргументы обоих комплексных параметров будем считать одинаковыми и равными

$$\operatorname{Arg} \rho = \operatorname{Arg} \varepsilon = \pi(\sqrt{5} - 1). \quad (17)$$

При  $\varepsilon = 0$  в пределе классического отображения такой выбор  $\rho$  позволит пронаблюдать уникальный феномен, известный как диск Зигеля [23, 35]. Совпадающий с параметром  $\rho$  мультипликатор неподвижной точки в начале координат отвечает моменту потери ею устойчивости, а число вращения оказывается иррациональным — равным «золотому сечению». Некоторая окрестность этой нейтральной неподвижной точки становится областью вращения с центром в  $z = 0$ . Вся эта область заполнена нейтральными квазипериодическими инвариантными кривыми. По мере удаления от центра вращения траектории все более и более усложняются, но остаются гладкими кривыми без самопересечений. Самая удаленная от центра траектория — это граница диска Зигеля. Она проходит через критическую точку (12) отображения и, вследствие этого, является кривой, не дифференцируемой ни в одной своей точке<sup>3</sup> и обладающей нетривиальными скейлинговыми свойствами [23].

Заметим, что решение  $z_{n+1} = z_n = 0$  удовлетворяет уравнению (6) и при ненулевых  $\varepsilon$ , то есть неподвижная точка в начале координат сохраняется в неявном случае. Более того, мультипликатор неподвижной точки, определяемый как

$$\mu = f'_{(1,2)}(z_n) = -\frac{g'_{z_n}(f_{(1,2)}(z_n), z_n)}{g'_{z_{n+1}}(f_{(1,2)}(z_n), z_n)} = \frac{\rho + 2z_n}{1 + 2\varepsilon f_{(1,2)}(z_n)}, \quad (18)$$

<sup>3</sup>Точнее, это происходит вследствие невыполнения для критической точки уравнения Шрёдера — невозможности введения ограниченной гладкой функции сопряжения траектории с окружностью.

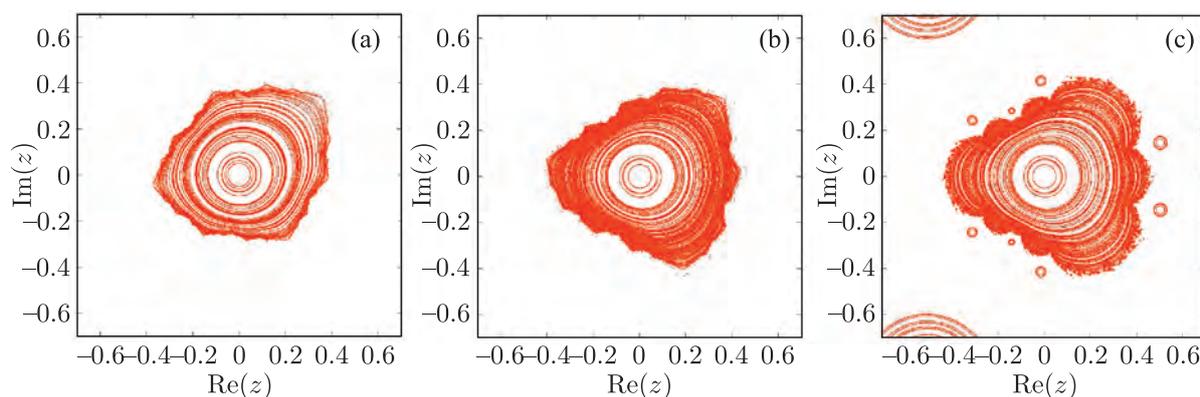


Рис. 3. Фазовый портрет модели (6): набор стартовых из случайно выбранных точек фазовых траекторий, динамика на которых подчиняется решению (16) со знаком «+». Параметр  $\rho$  на всех рисунках отвечает значению  $\exp(i\pi(\sqrt{5}-1))$ , при котором реализуется иррациональная нейтральная неподвижная точка в нуле. Другой параметр  $\varepsilon = 0$  (а),  $0.9 \exp(i\pi(\sqrt{5}-1))$  (б),  $\exp(i\pi(\sqrt{5}-1))$  (с).

при выборе решения  $z_n = f(z_n) = 0$  также сохраняет свое значение  $\mu = \rho$ . Таким образом, при изменении  $\varepsilon$  и при фиксированном  $\rho$  локальная структура фазового портрета в малой окрестности  $z = 0$  меняться не должна.

На рисунке 3 приведены полученные в результате численного моделирования фазовые портреты. Рисунок 3а — классический диск Зигеля при  $\varepsilon = 0$ . Рисунок 3б — продолжение диска Зигеля по параметру  $\varepsilon$ . Несмотря на достаточно большое по абсолютной величине значение параметра, отвечающего за неявность, структура диска вращения трансформируется довольно слабо. Лишь для обобщенно унитарного нелинейного неявного отображения фазовая плоскость кардинально отличается от аналогичной для отображения Мандельброта. На рисунке 3с имеется иерархическая структура из точек эллиптического типа с так называемыми островками устойчивости вокруг — характерная картина для консервативных систем. Однако самый большой такой островок является продолжением диска Зигеля и, по-видимому, сохраняет топологическую ему эквивалентность.

### 3. Динамика в обратном времени. Множество Жюлиа

Не менее важным, чем динамика в прямом времени, для понимания свойств системы в целом часто оказывается поведение в обратном времени. Так, с помощью обращенных траекторий можно найти репеллер (абсолютно неустойчивое инвариантное множество в фазовом пространстве), в том числе и хаотический. Самый известный пример хаотического репеллера — множество Жюлиа. Визуализация его, в частности, весьма полезна, так как оно является границей бассейнов притяжения аттракторов.

Для комплексных аналитических отображений имеет место ряд строго доказанных свойств множества Жюлиа, например [4, 35, 38, 39]:

- 1) если у отображения существует устойчивый цикл, то граница его бассейна притяжения совпадает с множеством Жюлиа, и если аттракторов несколько, то любая точка множества Жюлиа обязана соприкасаться с бассейном притяжения каждого из них, то есть быть многосторонней;
- 2) бесконечная обратная траектория точки из множества Жюлиа плотна на нем;

- 3) множество всех неустойчивых циклов рационального отображения плотно на множестве Жюлиа;
- 4) множество Жюлиа не пусто и содержит более чем счетное количество точек;
- 5) если множество Жюлиа имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то оно совпадает с комплексной плоскостью.

Динамика неявного отображения (6) в обратном времени определяется как

$$z_n = f_{(1,2)}^{-1}(z_{n+1}) = -\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\rho^2/4 + (z_{n+1} + \varepsilon z_{n+1}^2)}. \quad (19)$$

В типичном случае она неоднозначна, причем это возможно и при  $\varepsilon = 0$ , поскольку отображение Манделброта необратимо. Неоднозначность обратных итераций свидетельствует о бесконечном, но счетном количестве обратных траекторий для любого стартового значения переменной, и вместе с тем дает возможность ввести для них символическую кодировку в соответствии с выбором решения со знаком «+» или «-» на каждом шаге итерирования (19). Среди этого набора траекторий теоретически могут быть такие, которые сходятся к регулярным орбитам, а могут реализоваться и хаотические предельные орбиты.

Согласно второму из перечисленных свойств, на множестве Жюлиа традиционного отображения распределена любая орбита, стартующая на нем. Более того, благодаря первому свойству, стартующая из любого бассейна притяжения (то есть фактически из произвольной точки фазового пространства) обратная траектория за конечное время сойдется к орбите на множестве (с некоторой точностью). Наиболее полно обрисовывать множество Жюлиа должна, однако, более развитая и сложная (например, хаотическая) орбита. Для ее построения обычно применяют способ, известный в теории систем итерируемых функций как игра в хаос: одно из двух решений в каждый момент дискретного времени выбирается случайным образом. Для получения достаточно хорошего приближения множества Жюлиа для отображения Манделброта достаточно хоть и длинной, но ограниченной по времени обратной траектории, которая, даже стартуя из отдаленной от репеллера точки, быстро сходится к нему и плотно на него наматывается. Пример аппроксимации множества Жюлиа при таком же, как на рисунке 3, значении параметра  $\rho$  представлен на рисунке 4а.

Обобщим описанный алгоритм на случай неявного отображения. Построим обратную траекторию (19) со случайным выбором решений при  $\varepsilon \neq 0$ . Результаты моделирования для нескольких значений  $\varepsilon$  вплоть до унитарного предела (8) представлены на рисунках 4б–ф.

По мере роста  $|\varepsilon|$  увеличивается в размерах получаемая на фазовой плоскости фрактальная структура. Поначалу она мало отличается от множества Жюлиа на рисунке 4а, но затем усложняется, утолщается и в пределе  $\varepsilon \rightarrow 1$  покрывает всю комплексную плоскость. Последнее подтверждает консервативную природу динамики этого случая: отсутствие как аттракторов, так и репеллеров приводит к «броуновскому» блужданию траектории по фазовой плоскости.

Полученные множества, в принципе, нельзя называть множествами Жюлиа и говорить о выполнении для них перечисленных ранее свойств, поскольку все это требует строгого математического доказательства. По сути, представленные объекты являются нерегулярными отталкивающими предельными множествами. Численные эксперименты показали, однако, что их вид не зависит от реализации случайного символического кода. Также он визуально совпадает с видом множеств всех предельных обратных орбит со всевозможными кодами ограниченной длины. В связи с этим можно предположить инвариантность полученных множеств, которые будем называть обобщенными множествами Жюлиа.

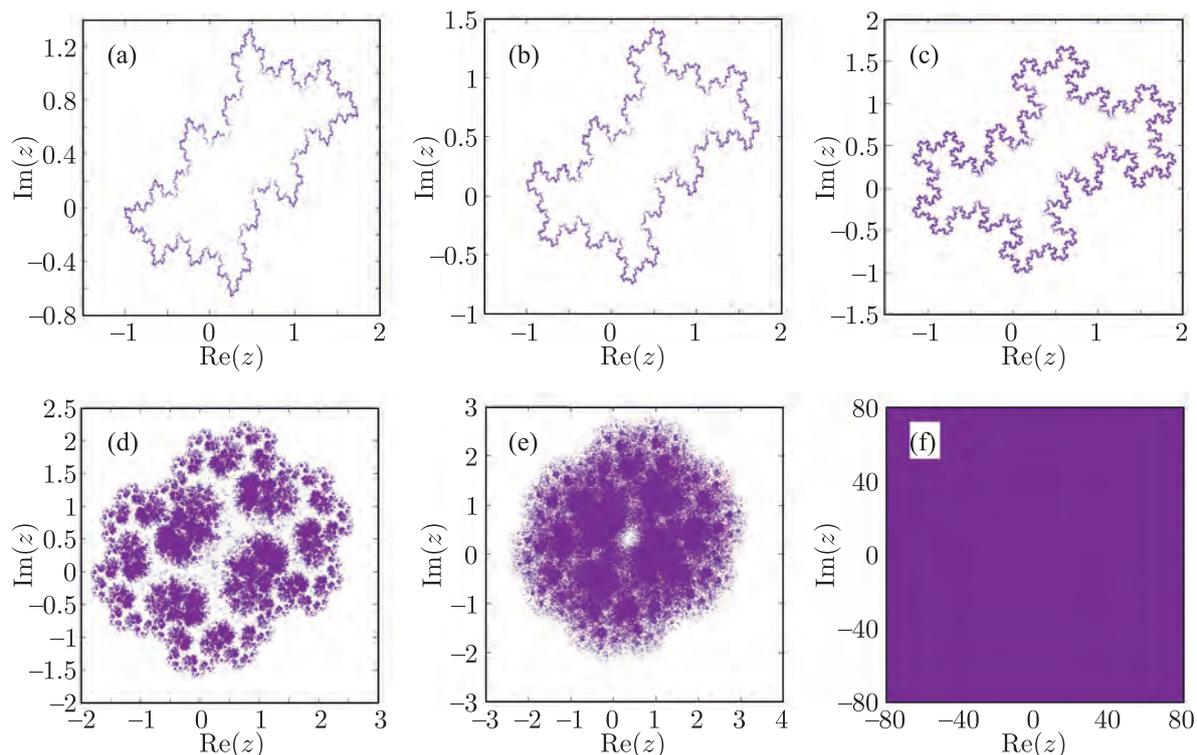


Рис. 4. Неустойчивое предельное множество, полученное обратными итерациями (19) со случайным выбором решений;  $\rho = e^{i\pi(\sqrt{5}-1)}$ ,  $\text{Arg } \varepsilon = \text{Arg } \rho$  и различные значения  $|\varepsilon|$ : (a) 0, (b) 0.2, (c) 0.4, (d) 0.6, (e) 0.7, (f) 1.0.

#### 4. Пространство параметров. Множество Мандельброта

В разделе 2 была продемонстрирована трансформация лишь одного примера фазового портрета модельной системы при включении неоднозначности в прямом времени и лишь при одной последовательности выбора решений с символическим кодом «+ + ...». При изменении параметра  $\rho$  траектория даже с идентичной символической динамикой может сходиться к аттракторам разного типа. (Это верно при  $\varepsilon = 0$  (см. карту на рис. 2), и эти аттракторы могут, как и диск Зигеля, сохраняться при  $0 < |\varepsilon| < 1$ .) Иные и более сложные символические коды тоже могут при подходящих значениях  $\rho$  приводить к устойчивым предельным орбитам. Мы получим более полную информацию о системе, если проанализируем большее количество устойчивых орбит. Сделаем это в рамках исследования пространства параметров. Будем строить карты динамических режимов, демонстрирующие области существования устойчивых циклов различных периодов и с различными символическими кодами. Не будем в этой работе рассматривать сложные, хаотические режимы. Карты будут, аналогично рисунку 2, представлять плоскость  $(|\rho|, \text{Arg } \rho)$  при разных значениях  $|\varepsilon|$  и при  $\text{Arg } \varepsilon = \text{Arg } \rho$ .

Для нахождения устойчивого цикла периода  $N$  у неявного отображения будем действовать следующим образом. Будем строить посредством (16) траектории в прямом времени с различными периодическими последовательностями выбора «+»- и «-»-решения. В результате итерирования (при удачном выборе начальных условий) каждая такая временная реализация комплексной переменной может сойтись к некоей своей орбите. Если орбита

периодическая, то ее период не может быть ниже минимального периода символической последовательности. Отсюда следует, что при поиске всех возможных циклов периода  $N$  можно ограничиться перебором  $2^N$  траекторий. Символическая последовательность для каждой отдельной траектории — периодически повторяющийся один из вариантов комбинаций «+» и «-» длины  $N$ .

Начнем с символического кода периода 1. На приведенных на рисунке 5 картах видно: множество Мандельброта при отличном от нуля  $\varepsilon$  сохраняется (ср. рис. 5а и 2), лишь сжимаются в размере и прижимаются к линии  $|\rho| = 1$  с приближением к обобщенно унитарному пределу (8) лепестки усложненного периода; при этом возникает и приближается к той же линии еще одна структура (см. верхнюю часть на рис. 5с–f), обладающая, на первый взгляд, топологическими свойствами того же множества Мандельброта. Эта вторая структура отвечает динамике на базе второго экстремума неявного отображения. Несмотря на то, что обе структуры с ростом  $\varepsilon$  стремятся слиться, мультистабильности не наблюдается.

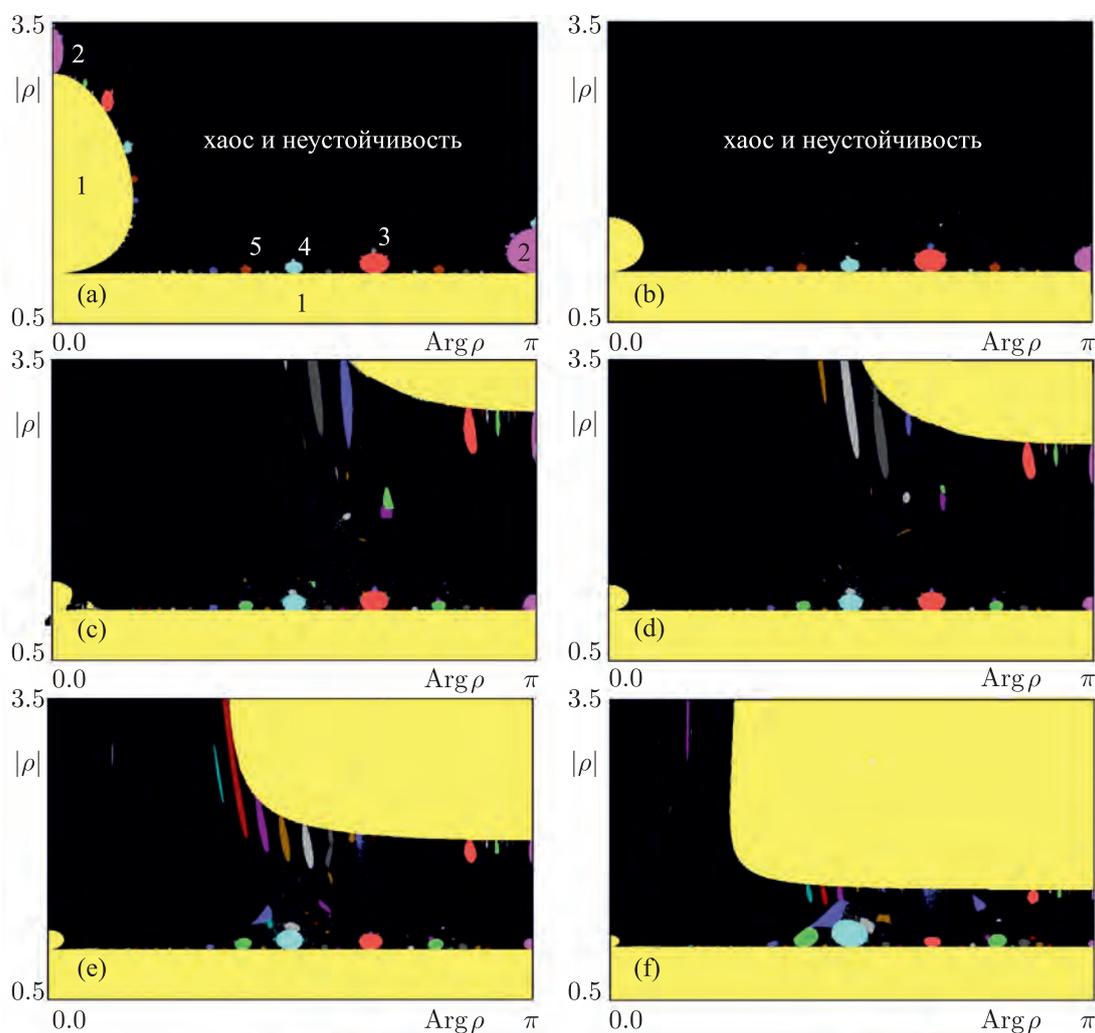


Рис. 5. Карта динамических режимов неявного отображения (6) на плоскости комплексного параметра  $\rho$  при  $\text{Arg } \varepsilon = \text{Arg } \rho$  и различных значениях  $|\varepsilon|$ : (а) 0.0001, (b) 0.4, (с) 0.6, (d) 0.63, (е) 0.7, (f) 0.9. Для динамики, отвечающей символическим кодам периода 1, показаны области существования всех циклов с длиной периода вплоть до 14.

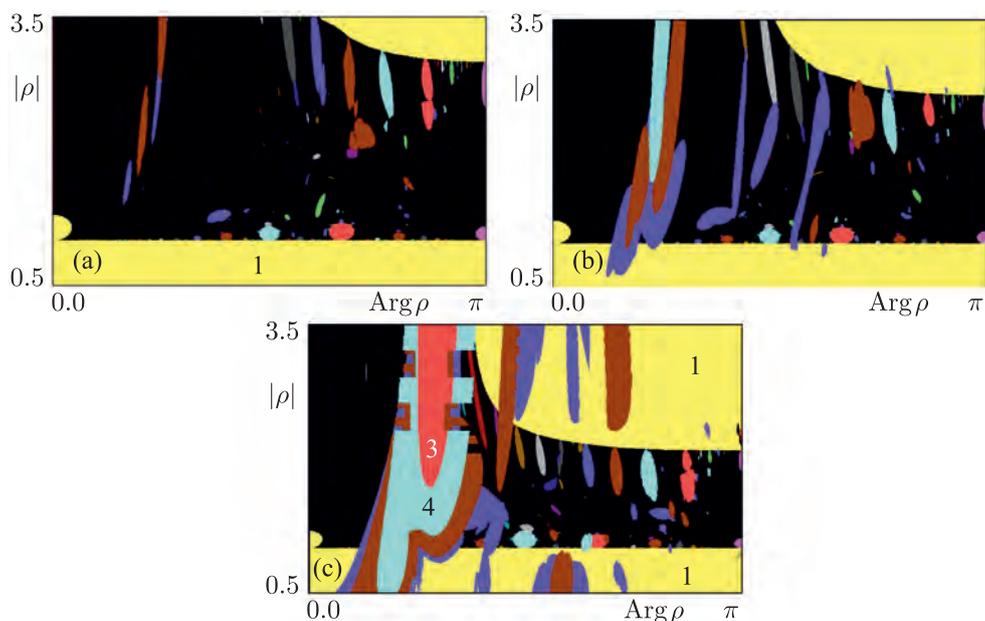


Рис. 6. Карта с указанием всех возможных периодических режимов с периодом от 1 до 6 и некоторых более высокопериодических при значениях  $|\varepsilon|$ , соответствующих рисункам 5с–е: (а) 0.6, (b) 0.63 и (с) 0.7. В левой части рисунка (с) фрагменты областей периода 3, 4 и 5 «вырезаны» для демонстрации мультистабильности.

Сосуществование двух или более аттракторов при одних и тех же значениях параметров, которое можно предположить благодаря многообразию символической динамики, становится возможным при учете кодов с минимальным периодом, большим единицы. В такой ситуации динамика может осуществляться сразу на базе обоих экстремумов и ее уже нельзя считать унимодальной. На рисунке 6 на картах, демонстрирующих все области циклического поведения с любой символической динамикой и периодом вплоть до 6 (и некоторые более высокопериодические), мультистабильность есть и явно нарастает в окрестности  $|\rho| = 1$  с приближением  $|\varepsilon|$  к 1, что часто происходит в консервативном пределе у обычных однозначно определенных отображений [40].

Мы ограничились поиском циклов относительно невысокого периода не столько для уменьшения трудоемкости численной процедуры, сколько для упрощения визуального восприятия карт с сильной мультистабильностью. Даже такой анализ позволяет выявить основные тенденции изменений плоскости параметров. Заметим, например, что наиболее явная область «нарастающей мультистабильности», в которой возникает все больше и больше сосуществующих аттракторов, хорошо видная в левой части рисунка 6с, устроена так, что для фиксированной точки на плоскости параметров первыми с увеличением  $|\varepsilon|$  возникают циклы высокого периода, а затем сверху спускаются лепестки все более коротких циклов. Объяснить это можно следующим образом. При небольших значениях  $|\varepsilon|$ , когда дополнительный экстремум уже не на бесконечности, но еще достаточно удален, рождаются орбиты, большую часть времени пребывающие в окрестности основного экстремума и лишь изредка посещающие отдаленные области фазового пространства вблизи второго экстремума. Такие траектории должны быть именно долгопериодическими. С приближением второго экстремума орбиты все чаще могут посещать его окрестность, сохраняя при этом устойчивость, и их период, таким образом, может быть ниже.

### 5. Мультистабильность. Бассейны притяжения

Феномен сосуществования периодических режимов при учете неоднозначности отображения целесообразно изучить еще и посредством анализа бассейнов их притяжения. Возьмем значение параметра  $\rho = 0.9 \exp(i\pi/4)$ , отвечающее точке плоскости параметров из характерной области «нарастающей мультистабильности». На диаграмме рисунка 7а для этой точки построены графики положения элементов циклов с периодами вплоть до 8 от параметра. Диаграмма подтверждает мультистабильность и последовательный характер возникновения периодических аттракторов. Для нескольких значений  $|\varepsilon|$ , отвечающих разной степени развитости мультистабильности (см. диаграмму), построены серии рисунков — бассейны притяжения разнопериодических (период указан цифрами) орбит.

Набор рисунков из левого столбца рисунка 7 демонстрирует трансформацию бассейна притяжения неподвижной точки в начале координат: он увеличивается в размере и усложняется. Остальные столбцы — бассейны более длинных периодических орбит. Эти циклы были получены анализом траекторий со всевозможными символическими кодами периода от 2 (устойчивых траекторий не обнаружилось) до 8. Видно, что для указанных бассейнов также сохраняется тенденция к увеличению размера с ростом  $|\varepsilon|$ . К тому же, за исклю-

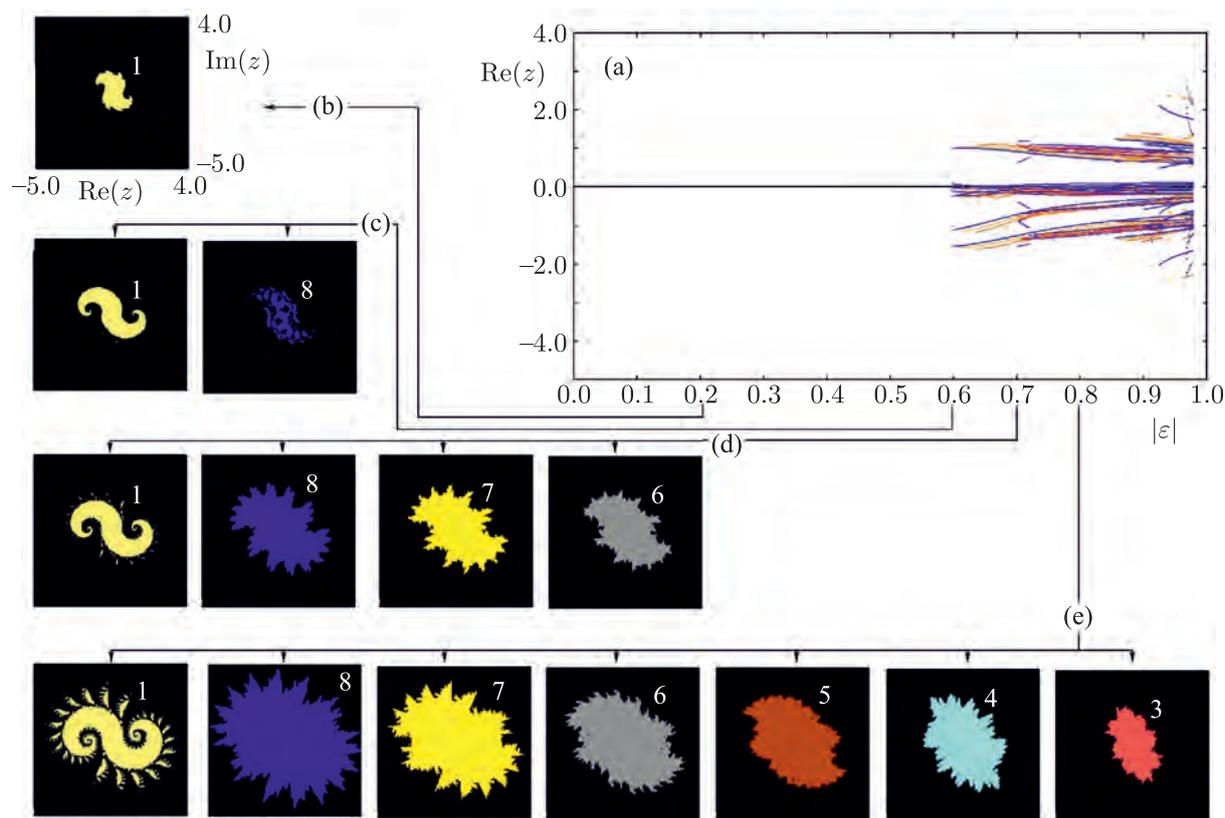


Рис. 7. (а) Диаграмма зависимости от параметра положения элементов устойчивых циклов с длиной периода от 1 до 8 модельного неявного отображения (б). Линии, отвечающие разным циклам, окрашены разными цветами. Серии (b), (c), (d), (e) — бассейны притяжения сосуществующих циклов (периоды указаны цифрами) при  $|\varepsilon| = 0.2, 0.6, 0.7, 0.8$  соответственно. Другие параметры:  $|\rho| = 0.9, \text{Arg } \rho = \text{Arg } \varepsilon = \pi/4$ . Диапазон изменения вещественной и мнимой части переменной на всех фазовых плоскостях идентичен рисунку 7б.



чением бассейна неподвижной точки, которая наследуется от отображения Мандельброта, размер бассейна тем больше, чем выше период определяющего аттрактор кода.

Можно заметить, что бассейны сосуществующих циклов не совпадают, но расположены в одной области фазового пространства и частично перекрываются друг другом. В связи с этим можно сделать следующее предположение. В соответствии со свойствами множества Жюлиа к нему сходится любая обратная траектория из любого бассейна любого аттрактора. Когда бассейнов много, граница каждого из них встраивается в множество Жюлиа, и каждая его точка соседствует со всеми бассейнами. Это справедливо для любых комплексных аналитических отображений, а классическим примером является так называемое ньютоново множество Жюлиа [41]. Если указанное свойство выполняется для обобщенного на случай неявного отображения множества Жюлиа, то этим, по-видимому, объясняется усложнение структуры бассейнов даже коротких циклов с ростом мультистабильности. Также этим можно объяснить усложнение и утолщение обобщенного множества на рисунке 4.

Важно отметить еще один вопрос, связанный с мультистабильностью: в результате каких бифуркационных механизмов возникают новые периодические аттракторы? Начнем с того, что элементы цикла периода  $N$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} g(z_{n+1}, z_n) &= 0, \\ g(z_{n+2}, z_{n+1}) &= 0, \\ &\dots, \\ g(z_{n+N-1}, z_{n+N-2}) &= 0, \\ g(z_n, z_{n+N-1}) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Количество периодических точек — элементов периодических орбит с периодом, не превышающим  $N$ , — равно  $2^N$ . Это следует из теоремы Безу для системы однородных уравнений [42]. Действительно, согласно ей, если есть  $N$  однородных полиномиальных уравнений от  $N + 1$  переменных со степенями  $d_1, \dots, d_N$ , определяющих  $N$  гиперповерхностей в проективном  $N$ -мерном пространстве, то если количество общих одновременно для всех поверхностей точек (решений системы) конечно, оно равно  $d_1 \cdot \dots \cdot d_N$ . При этом учитываются совпадающие решения при их слиянии в вырожденных ситуациях и комплексные значения корней. Уравнения из системы (20) не являются однородными. К такому виду их можно привести с помощью принимающей произвольные значения  $(N + 1)$ -ой переменной: домножением на эту переменную в соответствующей степени членов полиномов в левых частях уравнений (20) достигается одинаковый порядок этих членов.

Заметим, что квадратичное отображение Мандельброта (5) также обладает  $2^N$  периодическими точками для любого периода  $N$ , поскольку именно таково количество решений уравнения  $2^N$ -ой степени  $f^N(z) = z$ , определяющего цикличность явно определенной динамики.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что при переходе от классического отображения (5) к неявно определенному не возникает новых периодических орбит и не исчезают уже имеющиеся. Они лишь могут перемещаться в фазовом пространстве, в частности, попадая частично или полностью в область «влияния» дополнительного экстремума. Кроме того, циклы могут менять устойчивость. Поэтому очевидно, что мультистабильные устойчивые циклы — это стабилизирующиеся орбиты, вложенные при  $\varepsilon = 0$  в множество Жюлиа. Любопытно, что при развитии мультистабильности хаотический репеллер размывается и распространяется на всю фазовую плоскость (см. рис. 4), в то время как его «скелет» из периодических орбит все более истощается.

## Заключение

Мы ввели в рассмотрение модельную дискретную динамическую систему, динамика которой задается неявным отображением на множестве комплексных чисел и, следовательно, неоднозначно определена как в прямом, так и в обратном времени. При этом, варьируя параметры системы, можно переводить ее как в класс однозначно определенных в прямом времени систем, так и в класс систем неоднозначных, но с обобщенно унитарным оператором эволюции. Под обобщенной унитарностью мы подразумеваем такое свойство динамической системы, что задающая изменение переменной за один шаг дискретного времени *нелинейная* функция  $f$  удовлетворяет условию (17), сходному с классическим определением унитарности (которая, как известно, сопровождается консервативностью и обратимостью).

Когда уравнения рассматриваемой в работе системы определяют поведение системы в прямом времени явным образом, ее динамика является комплексно аналитической и демонстрирует соответствующие характерные феномены. При появлении неоднозначности в прямом времени характерные для комплексной аналитической динамики черты сохраняются, при этом в результате стабилизации вложенных в множество Жюлиа явно определенной системы неустойчивых циклов появляется мультистабильность, усиливающаяся тем больше, чем ближе параметры системы к соответствующим обобщенной унитарности оператора эволюции значениям. Когда оператор эволюции является обобщенно унитарным, поведение системы как в прямом, так и в обратном времени обладает свойствами, характерными для консервативной динамики.

В качестве заключения имеет смысл обсудить пригодность такого рода неявных модельных систем для решения тех или иных задач. Неявные зависимости встречаются довольно часто: при проектировании поверхностей, при реконструкции многомерного объекта (или системы) по его проекции (например, см. [43]), в теории обобщенной синхронизации [44], для неявных численных схем решений уравнений и т. д. Неявные и неоднозначные модели применяют в экономике [45], компьютерной графике [46], в методиках контроля хаоса [47], топологии [48].

С точки зрения теории динамических систем, неявно заданное дискретное отображение кажется, на первый взгляд, абсолютно нефизичной конструкцией, ведь оно из-за неоднозначности динамики не может служить сечением Пуанкаре аттрактора автономной гладкой потоковой системы. Однако необратимые во времени явные отображения также являются абстракцией. Считается, что в сечении Пуанкаре (или стробоскопическом сечении) дифференциальной системы имеет место сильное сжатие по одному из направлений. В таком приближении можно считать, что две разные траектории за одно сечение в прямом времени могут прийти в одну точку. Можно, наверное, представить и инвариантное множество, у которого вдобавок есть еще и сильное растяжение в другом направлении, откуда следует возможность приближения в виде неоднозначности в прямом времени. Такую ситуацию как раз следует ожидать у консервативных или близких к ним систем. Стоит также отметить возможность реализации динамики неявного отображения в неавтономных системах, например в кусочно-непрерывных кольцевых, в которых выбор решения на каждой итерации осуществляется извне каким-либо требуемым образом. Такая методика может пригодиться для контроля хаоса или кодирования информации. Также можно обобщить на случай неоднозначной динамики некоторые изначально дискретные модели, например иерархические, применяемые в теории фазовых переходов, перколяции или для описания электрических цепей [30].

## Список литературы

- [1] Reichl L. E. The transition to chaos in conservative classical systems: Quantum manifestations. New York: Springer, 1992. 551 pp.
- [2] Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант: К решению парадокса времени. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 210 с.
- [3] Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. San-Francisco, Calif.: Freeman, 1982. 460 pp.
- [4] Peitgen H.-O., Richter P. H. The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems. Berlin: Springer, 1986. 202 pp.
- [5] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // *Comm. Math. Phys.*, 1971, vol. 20, no. 3, pp. 167–192.
- [6] Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 56.) Hackensack, N.J.: World Sci., 2006. 228 pp.
- [7] Schuster H. G., Just W. Deterministic chaos: An introduction. Weinheim: Wiley-VCH, 2005. 312 pp.
- [8] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
- [9] Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // *Phys. D*, 1983, vol. 7, nos. 1–3, pp. 16–39.
- [10] Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S. J. Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Phys. D*, 1982, vol. 5, nos. 2–3, pp. 370–386.
- [11] Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Sci., 1986. 264 pp.
- [12] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Comm. Math. Phys.*, 1980, vol. 74, no. 2, pp. 189–197.
- [13] Chen C., Györgyi G., Schmidt G. Universal transition between Hamiltonian and dissipative chaos // *Phys. Rev. A*, 1986, vol. 34, no. 3, pp. 2568–2570.
- [14] Zisook A. B. Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings // *Phys. Rev. A*, 1981, vol. 24, no. 3, pp. 1640–1642.
- [15] Isaeva O. B., Kuznetsov S. P. On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 459–476.
- [16] Peckham B. B., Montaldi J. Real continuation from the complex quadratic family: Fixed-point bifurcation sets // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 391–414.
- [17] Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry: Order and chaos in reversible dynamical systems // *Phys. Rep.*, 1992, vol. 216, nos. 2–3, pp. 63–177.
- [18] Мандельброт Б. Б. Фракталы и хаос: Множество Мандельброта и другие чудеса. Москва – Ижевск: РХД, 2009. 392 с.
- [19] Bullett Sh. R., Osbaldestin A. H., Percival I. C. An iterated implicit complex map // *Phys. D*, 1986, vol. 19, no. 2, pp. 290–300.
- [20] Bullett Sh. Dynamics of quadratic correspondences // *Nonlinearity*, 1988, vol. 1, no. 1, pp. 27–50.
- [21] Mestel B. D., Osbaldestin A. H. Renormalisation in implicit complex maps // *Phys. D*, 1989, vol. 39, nos. 2–3, pp. 149–162.
- [22] Cvitanović P., Myrheim J. Universality for period  $n$ -tuplings in complex mappings // *Phys. Lett. A*, 1983, vol. 94, no. 8, pp. 329–333.
- [23] Widom M. Renormalization group analysis of quasiperiodicity in analytic maps // *Comm. Math. Phys.*, 1983, vol. 92, no. 1, pp. 121–136.
- [24] Beck Ch. Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets // *Phys. D*, 1999, vol. 125, nos. 3–4, pp. 171–182.

- [25] Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I. Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment // *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 64, no. 5, 055201(R), 4 pp.
- [26] Исаева О.Б. О возможности реализации феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах, построенных из связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода // *Изв. вузов. ПНД*, 2001, т. 9, № 6, с. 129–146.
- [27] Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H. A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps // *Phys. D*, 2008, vol. 237, no. 7, pp. 873–884.
- [28] Lee T.D., Yang C.N. Statistical theory of equations of state and phase transitions: 2. Lattice gas and Ising model // *Phys. Rev. (2)*, 1952, vol. 87, no. 3, pp. 410–419.
- [29] Yang C.N., Lee T.D. Statistical theory of equations of state and phase transitions: 1. Theory of condensation // *Phys. Rev. (2)*, 1952, vol. 87, no. 3, pp. 404–409.
- [30] Энтин М.В., Энтин Г.М. Масштабная инвариантность в теории перколяции и фракталы // *Письма в ЖЭТФ*, 1996, т. 64, № 6, с. 427–432.
- [31] Shudo A., Ishii Y., Ikeda K.S. Julia set describes quantum tunnelling in the presence of chaos // *J. Phys. A*, 2002, vol. 35, no. 17, L225–L231.
- [32] Govin M., Jauslin H.R., Cibils M. Julia sets in iterative KAM methods for eigenvalue problems // *Chaos Solitons Fractals*, 1998, vol. 9, no. 11, pp. 1835–1846.
- [33] Исаева О.Б., Елисеев М.В., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М. Моделирование автоэлектронной эмиссии с фрактальной поверхности // *Изв. вузов. ПНД*, 1999, т. 7, № 5, с. 33–43.
- [34] Bohr T., Cvitanović P., Jensen M.H. Fractal «aggregates» in the complex plane // *Europhys. Lett.*, 1998, vol. 6, no. 5, pp. 445–450.
- [35] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: РХД, УдГУ, 2000. 320 с.
- [36] MacKay R.S., van Zeijts J.B.J. Period doubling for bimodal maps: A horse-shoe for a renormalization operator // *Nonlinearity*, 1988, vol. 1, no. 1, pp. 253–277.
- [37] Pecora N., Tramontana F. Maps with vanishing denominator and their applications // *Front. Appl. Math. Stat.*, 2016, vol. 2, 11 pp.
- [38] Fatou P. Sur les équations fonctionnelles // *Bull. Soc. Math. France*, 1919, vol. 47, pp. 161–271; 1920, vol. 48, pp. 208–314.
- [39] Julia G. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles // *J. Math. Pure Appl. (8)*, 1918, vol. 1, pp. 47–246.
- [40] Feudel U. Complex dynamics in multistable systems // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1607–1626.
- [41] Cayley A. Desiderata and suggestions: No. 3. The Newton–Fourier imaginary problem // *Am. J. Math.*, 1879, vol. 2, no. 1, p. 97.
- [42] Математическая энциклопедия: Т. 1 / И.М. Виноградов (ред.). Москва: Советская энциклопедия, 1977. 1152 с.
- [43] DiFranco D.E., Cham T.-J., Regh J.M. Reconstruction of 3D figure motion from 2D correspondences // *Proc. of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition: Vol. 1. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2001, pp. 307–314.*
- [44] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 496 с.
- [45] Gardini L., Hommes C., Tramontana F., de Vilder R. Forward and backward dynamics in implicitly defined overlapping generations models // *J. Econ. Behav. Organ.*, 2009, vol. 71, no. 2, pp. 110–129.
- [46] Sclaroff S., Pentland A. Generalized implicit functions for computer graphics // *Comput. Graph.*, 1991, vol. 25, no. 4, pp. 247–250.
- [47] Hill D.L. Control of implicit chaotic maps using nonlinear approximations // *Chaos*, 2000, vol. 10, no. 3, pp. 676–681.

- [48] Власенко И. Ю. Внутренние отображения: Топологические инварианты и их приложения. (Труды Института математики НАН Украины, т. 101.) Киев: Инст. матем. НАН Украины, 2014. 216 с.
- [49] Гольберг А. И., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // УМН, 1983, т. 38, № 1, с. 159–160.
- [50] Каток С. Б. Фуксовы группы. Москва: Факториал, 2002. 160 с.

## Dynamics of a discrete system with the operator of evolution given by an implicit function: from the Mandelbrot map to a unitary map

Olga B. Isaeva<sup>1</sup>, Maxim A. Obychev<sup>2</sup>, Dmitry V. Savin<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Saratov State University

ul. Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026, Russia

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

<sup>1</sup>isaevao@rambler.ru, <sup>2</sup>obycheff.maxim@yandex.ru, <sup>3</sup>savin.dmitry.v@gmail.com

An abstract discrete time dynamical system, given by an implicit function of the values of a variable at successive moments of time, is presented. The dynamics of this system is defined ambiguously both in reverse and forward time. An example of a system of such type is described in the works of Bullett, Osbaldestin and Percival [Physica D, 1986, vol. 19, pp. 290–300; Nonlinearity, 1988, vol. 1, pp. 27–50]; it demonstrates some features of the behavior of Hamiltonian systems. The map under study allows a smooth transition from the case of the explicitly defined evolution operator to an implicit one and, further, to the “conservative” limit, corresponding to the symmetric evolution operator satisfying the unitarity condition. Being created on the basis of the complex Mandelbrot map, it demonstrates the transformation of the phenomena of complex analytical dynamics to “conservative” phenomena and allows us to identify the relationship between them.

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Keywords: Mandelbrot set, Julia set, conservative and quasi-conservative dynamics, multistability, implicit map

Received May 24, 2017, accepted August 14, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 331–348 (Russian)

